总体有效的 DEA 模型※

李 果 王应明
(厦门大学自动化系 361005)

摘 要 DEA 方法的特点是不需预先给出权重，强调被评价单元存在的优势，忽略其劣势。然而在有些情况下评价结果缺乏合理性和可操作性，这是传统 DEA 模型的一个缺陷。本文探讨了总体有效的 DEA 模型，并用一个实例说明了该模型更能准确地反映决策单元的相对有效性。

关键词 DEA 决策单元 相对效率 数学规划

1 引言

数据包络分析 (Data Envelopment Analysis, 简记为 DEA)，是用来评价一个决策单元 (Decision Making Unit, 简记为 DMU) 的相对有效性的一种评价方法[1]。这种方法便于处理那些输入、输出之间权重信息不清楚的问题。但是，在实际中确实也存在这样的情况，单纯的 DEA 模型得到的权重缺乏合理性和可操作性，例如指标间的局部线性关系会导致每一决策单元 DEA 有效的结果与实际情况不符。因为 DEA 模型不需预先给出权重，强调被评价单元存在的优势，忽略其劣势。这是 DEA 模型的特点，有时也成了一个缺点。因此需要对 DEA 模型进行修正以得到合理的权重和效率指数。

本文提出以所有 DMU 的有效性值最大为目的的总体有效的 DEA 模型，从而可以从 DMU 总体有效的角度来测算权重和相对效率指数，使得结果更加合理和准确。

2 传统的 DEA 模型及其局限

设有 n 个 DMU_j ($1 \le j \le n$)，DMU_j 的输入、输出向量分别为

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^T > 0$$

$$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj})^T > 0$$

$$(j = 1, \cdots, n, \text{下同})$$

输入、输出权向量为

$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^T$$

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_s)^T$$

称 $h_{j0} = \dfrac{u^T y_{j0}}{v^T x_{j0}} = \dfrac{\sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij0}}$，$j_0 = 1, \cdots, n$ 为第 j_0 个决策单元 DMU_{j0} 的效率评价指数。

对 DMU_{j0} 进行评价的 C^2R 模型为:

$$(\bar{P})\begin{cases} \max h_{j0} = \dfrac{\sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij0}} \\ \text{s.t. } h_j = \dfrac{\sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \le 1 \\ u_k \ge 0 \quad k = 1, \cdots, s \\ v_i \ge 0 \quad i = 1, \cdots, m \end{cases}$$

令 $t = (v^T x_{j0})^{-1}$，$k = tv$，$\_ = tu$，则上述分式规划模型 ($\bar{P}$) 可变换为:

$$(P)\begin{cases} \max \_^T y_{j0} = h_{j0} \\ \text{s.t. } k^T x_j - \_^T y_j \ge 0 \\ k^T x_{j0} = 1 \\ k \ge 0, \_ \ge 0 \end{cases}$$

(P) 的对偶规划模型可表示为

※ 收稿日期: 1999-01-19
本研究得到国家自然科学青年基金 (79600020) 资助

$$(D)\begin{cases}\min \theta = h_{j0} \\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_{j0} \\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_j \geq y_{j0} \\ \lambda_j \geq 0\end{cases}$$

对一组决策单元, 用 DEA 方法对各决策单元进行有效性评价的结果与所选用的指标体系是密切相关的。因为在不同的指标体系下, 各输入、输出向量对应的权重是不同的, 相对效率指数也是不同的。当指标间存在一定的关系时, 评价结果也表现出一定的规律性。

根据文献 [2], 当输入、输出之间正相关时的 DEA 评价规律为:

定理 1 若评价指标 $D = \{x^1, \cdots, x^m | y^1, \cdots, y^s\}$ 中的某一输出指标与输入指标之间存在下述关系

$$y(i0) = \lambda x(j0)$$

则每一决策单元有效, 即

$$\theta_k(D) = 1, \quad (k = 1, \cdots, n, \text{下同})$$

定理 1的推广形式是

定理 2 若

$$\lambda_i \geq 0, V_i \geq 0, D = \{x^1, \cdots, x^m | y^1, \cdots, y^s\}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i y(i) = \sum_{i=1}^{m} V_i x(i)$$

则每一决策单元有效, 即

$$\theta_k(D) = 1,$$

以上定理表明, 指标间的局部线性关系会导致每一决策单元 DEA 有效的结果。因而对输入输出之间存在线性关系的情况, 使用传统的 DEA 模型会有不如人意的结果。

3 总体有效的 DEA模型

上述 DEA 模型显然都是从最有利于被评价单元 DMU_{j0} 的角度来解的, 强调了被评价单元的优势, 忽略了其劣势, 因而所得的结果也是针对此单元的, 如果选取另一个单元评价, 结果又会不同。使得各个 DMU 之间缺乏可比性。如果出现输入输出指标间存在正相关关系的情况, 更会产生每一决策单元有效的不合理结果。

我们从总体有效的角度出发, 以所有效率指数最优为目的, 测算在此条件下的输入输出权向量, 进而考察各 DMU 的相对效率。由于强调的是总体最优, 克服了传统 DEA 模型强调单个被评价单元优势的片面性, 从而得到更合理的权重和相对效率。

设有 n 个 DMU_j ($1 \leq j \leq n$), DMU_j 的输入、输出向量, 输入、输出权向量分别为

$$x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{mj})^T > 0$$
$$y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \cdots, y_{sj})^T > 0$$
$$v = (v_1, v_2, \cdots, v_m)^T$$
$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_s)^T$$
$$h_{j0} = \sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj0} \Big/ \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij0}, \ j_0 = 1, \cdots, n$$

为 DMU_{j0} 的效率评价指数。

总体有效的 DEA 模型为:

$$(MP)\begin{cases}\max \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} h_j \\ \text{s.t.}\ h_j = \dfrac{\sum_{k=1}^{s} u_k y_{kj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \\ 0 \leq h_j \leq 1 \\ u_k \geq 0 \quad k = 1, \cdots, s \\ v_i \geq 0 \quad i = 1, \cdots, m\end{cases}$$

这是一个非线性规划, 求解显然比传统 DEA 模型的线性规划要复杂得多。但是, 借助于现在方便的计算工具软件, 解非线性规划问题比以前方便了许多[3,4]。

4 结束语

本文针对传统 DEA 模型在有些情况下因为指标体系的特殊性而产生不合理权重和相对效率的缺陷, 提出了一个总体有效的 DEA 模型来解决这一问题

参 考 文 献

1 盛昭瀚, 朱乔, 吴广谋. DEA 理论、方法与应用. 北京: 科学出版社, 1996

2 吴广谋, 盛昭瀚. 指标特性与 DEA 有效性的关系. 东南大学学报, 1992 (5): 124-127

3 陈开明. 非线性规划. 上海: 复旦大学出版社, 1991.

4 袁亚湘. 非线性规划数值方法. 上海: 上海科学技术出版社, 1993